# HERHANGİ BİR YÖNDE TÜREV ALMA



Zincir kuralından, $f(x,y,z)$ fonksiyonu $x=g(t)$, $y=h(t)$, $z=k(t)$ eğrisi üzerinde $t$ nin türevlenebilen bir fonksiyonu ise,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad \text{---}(1)$$

olduğunu biliyoruz. Eğer eğri özel olarak, $P(a,b,c)$ noktasından geçen ve $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ vektörüne paralel olan

$$\left.\begin{aligned} x &= a + u_1 t \\ y &= b + u_2 t \\ z &= c + u_3 t \end{aligned}\right\}$$

doğrusu ise, yukarıda verilen (1) bağıntısı

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_P = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3 \qquad \text{---}(2)$$

şeklini alır. Burada dikkat edilirse, bu ifade $u$ vektörü ile $f$ in gradiyenti adı verilen

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) j + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) k$$

vektörünün skalar çarpımıdır. Bu ifadenin $P(a,b,c)$ noktasındaki değeri $(\nabla f)_P$ ile gösterilir.

**Tanım:** $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P(a,b,c)$ noktasındaki kısmi türevleri mevcut olsun. $u$ bir birim vektör olmak üzere

$$(D_u f)_P = (\nabla f)_P \cdot u$$

sayısına $f$ in $u$ yönündeki türevinin $P$ noktasındaki değeri denir.

**Örnek:** $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ fonksiyonunun

$$u = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j - \frac{6}{7}k$$

yönündeki türevinin $P(1,7,7)$ noktasındaki değerini hesaplayalım.

$$f_x = y^2 \quad , \quad f_y = 2xy + z \, , \quad f_z = y$$

olduğundan $f$ in $P(1,7,7)$ noktasındaki gradiyenti

$$(\nabla f)_P = (\nabla f)_{(1,7,7)} = 49i + 21j + 7k$$

bulunur. Buradan,

$$(D_u f)_P = (D_u f)_{(1,7,7)} = 49 \cdot \frac{2}{7} + 21 \cdot \frac{3}{7} + 7\left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$= 17$$

olur.

**Örnek:** $f(x,y,z) = x e^{\frac{y}{z}}$ fonksiyonunun $i = (1,0,0)$ yönündeki türevini hesaplayalım.

$$D_i f = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 + f_z \cdot 0$$

$$= f_x$$

olur. O halde bir fonksiyonun $i$ yönündeki türevi $f_x$ kısmi türevidir. Böylece

$$D_i f = e^{\frac{y}{z}}$$

bulunur.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi

$$D_i f = f_x \, , \quad D_j f = f_y \, , \quad D_k f = f_z$$

olur.

**Örnek:** $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$ fonksiyonunun $P(5,1,0)$ noktasını $Q(2,-3,12)$ noktasına birleştiren doğru yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin P noktasındaki değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$PQ = (-3,-4,12)$ olduğundan PQ vektörüne paralel birim vektör

$$u = \frac{1}{\|PQ\|} PQ = \left(\frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

olur.

$$f_x(x,y,z) = 2xy, \quad f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz, \quad f_z(x,y,z) = y^2$$

olduğundan

$$D_u f = 2xy \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + (x^2 + 2yz) \cdot \left(-\frac{4}{13}\right) + y^2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)$$

şeklindedir. Bu türevin $P(5,1,0)$ noktasındaki değeri

$$(D_u f)_P = (D_u f)_{(5,1,0)} = 10 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) - 25 \cdot \frac{4}{13} + \frac{12}{13} = -\frac{118}{13}$$

bulunur.

$u$ birim vektörünün koordinat eksenleri ile yaptığı açıların ölçüleri sırasıyla, $\theta, \varphi, \gamma$ ise $u$ nun bileşenleri $\cos\theta$, $\cos\varphi$, $\cos\gamma$ olur. Bunlara $u$ vektörünün **doğrultman kosinüsleri** adı verilir. Bu durumda $f$ in $u$ yönündeki türevi

$$D_u f = f_x \cos\theta + f_y \cos\varphi + f_z \cos\gamma$$

olur.

$f$ iki değişkenli bir fonksiyon ise, $u$ vektörünün $x$-ekseni ile yaptığı açının ölçüsü $\theta$ ise $y$-ekseni ile yaptığı açının ölçüsü $\frac{\pi}{2} - \theta$ dır. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ olacağından $f(x,y)$ fonksiyonunun $u$ yönündeki türevi

$$D_u f = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta$$

olur.

$\theta$ verildiğinde $u$, $u$ verildiğinde $\theta$ bulunabileceğinden $D_u f$ yönlü türevi yerine $D_\theta f$ de yazılabilir.

**Örnek:** $f(x,y) = 2xy + 3x^3y$ fonksiyonu için $\left(D_{\frac{\pi}{4}} f\right)(1,2)$ türevini hesaplayınız.

**Çözüm:** $f_x = 2y + 9x^2y$ , $f_y = 2x + 3x^3$

$$D_{\frac{\pi}{4}} f = \left(2y + 9x^2y\right)\cos\frac{\pi}{4} + \left(2x + 3x^3\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2y + 9x^2y + 2x + 3x^3\right)$$

$$\left(D_{\frac{\pi}{4}} f\right)(1,2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4 + 18 + 2 + 3\right)$$

$$= \frac{27}{2}\sqrt{2}$$

# İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN TAYLOR AÇILIMI



$z=f(x,y)$ fonksiyonunun $(a,b)$ noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\dots$$

serisine $f$ fonksiyonunun $(a,b)$ noktasındaki **Taylor serisi** denir.

Bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi bu serinin yakınsak ve toplamının $f(x,y)$ olması için gerek ve yeter şart $0<\theta<1$ için,

$$K_n=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\left[f_x\left(a+\theta(x-a),\, b+\theta(y-b)\right)\right]^{(n+1)}(x-a)^{(n+1)}\right.$$

$$\left.+\left[f_y\left(a+\theta(x-a),\, b+\theta(y-b)\right)\right]^{(n+1)}(y-b)^{(n+1)}\right\}$$

kalan teriminin sıfıra gitmesidir.

<u>Örnek:</u> $f(x,y)=x^3+2x^2+3xy+y^2-x+y-1$

ifadesini $(x-1)$ ve $(y+1)$ in kuvvetlerine göre yazalım.

$f(1,-1) = -2$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 4x + 3y - 1 \Rightarrow f_x(1,-1) = 3$

$f_y(x,y) = 3x + 2y + 1 \Rightarrow f_y(1,-1) = 2$

$f_{xx}(x,y) = 6x + 4 \Rightarrow f_{xx}(1,-1) = 10$

$f_{xy}(x,y) = 3 \Rightarrow f_{xy}(1,-1) = 3$

$f_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(1,-1) = 2$

$f_{xxx}(x,y) = 6 \Rightarrow f_{xxx}(1,-1) = 6$

$f_{xxy} = f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = 0$

$$\rightarrow f(x,y) = -2 + \frac{1}{1!}\left[3(x-1) + 2(y+1)\right] + \frac{1}{2!}\left[10(x-1)^2 + 6(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[6(x-1)^3\right] //$$

**Örnek:** $f(x,y) = e^x \sin y$ fonksiyonunu $(0,0)$ noktası komşuluğunda üçüncü mertebeden terimlere kadar Taylor serisine açalım.

$f(0,0) = 0$

$f_x(x,y) = e^x \sin y \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = e^x \sin y \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xxx}(x,y) = e^x \sin y \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_y(0,0) = 1$

$f_{yy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1$

$f_{xxy}(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow f_{xxy}(0,0) = 1$

$f_{xyy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_{xyy}(0,0) = 0$

$f_{yyy}(x,y) = -e^x \cos y \Rightarrow f_{yyy}(0,0) = -1$

olduğundan

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{2!} x^2 y - \frac{1}{3!} y^3 + \dots$$

bulunur.